DOI:10.16016/j.1000-5404.2001.04.038
第23卷第4期 第三军医大学学报 Vol. 23, No. 4
446 2001年4月 ACTA ACADEMIAE MEDICINAE MILITARIS TERTIAE Apr. 2001

文章编号:1000-5404(2001)04-0446-02

论著

细菌波动生长与环境关系数学模型

王开发,梁正东,雷玉洁 (第三军医大学基础医学部数学教研室,重庆 400038)

提 要:目的 针对开放微生物生长系统,探讨细菌波动生长的产生机制。方法 以单种群细菌为研究对象,应用非线性系统动力学和数值模拟分析方法讨论周围环境条件变化对细菌生长的影响关系。结果 建立了单种群细菌波动生长与环境关系数学模型。结论 证明了模型的合理性并给出了模型的数值模拟结果,为研究细菌波动生长规律作了量化分析探索。

关键词:细菌波动生长;环境;数学模型
中图法分类号:Q935;R311 文献标识码:A

Mathematical model of the relationship between bacterial wave growth and environment

WANG Kai-fa, LIANG Zheng-dong, LEI Yu-jie (Department of Mathematics, Third Military Medical University, Chongqing 400038, China)

Abstract: Objective To explore the generative mechanism of bacterial wave growth in view of the open living system of microorganism. Methods With the single strain of bacterium as the subject, the nonlinear method of the dynamic systems and the analyzing method of the numerical simulation were used to study the effect of the changing environment on the bacterial growth. Results A mathematical model of the relationship between the bacterial wave growth and environment was established. Conclusion This model is verified to be scientific and its numerical simulation results are obtained, providing a helpful quantitative analysis for the research on the laws of bacterial wave growth.

Key words: bacterial wave growth; environment; mathematical model

细菌生长繁殖的总菌数与生长时间的定量关系,可借助许多数学模型描述[1,2]。然而细菌的生长代谢是开放系统条件下的生命活动过程,它一方面导致着周围环境条件的变化,另一方面又受到环境条件变化的制约,因此,许多学者把环境因素纳入了微生物学研究的范畴。徐启旺等[3,4]运用生物显色技术,在培养基上点种奇异变形杆菌,试验观察到细菌周期波动生长。在文献[2]的基础上,针对开放微生物生长系统,通过分析周围环境条件变化对细菌生长的影响关系,建立了细菌波动生长与环境关系数学模型,分析了模型的合理性,得到了可以很好描述开放系统细菌波动生长变化的数值模拟分析结果,推广了文献[2]的工作。

1 模型及其合理性

细菌的生长代谢总是不断地摄取周围营养,排出废物,从而一方面导致着周围环境条件的变化,另一方面又受到环境条件变化的制约。我们选用 Logistic 型方程作为细菌生长的描述[2],再利用废物数量因子作为刻划环境变化的指标,记 t 时刻细菌总菌数、细菌体内和周围环境中的废物数量为 x(t)、y(t)和 z(t)。考虑细菌体内的废物会导致细菌的部分死亡,同时环境废物将部分溢流和通过细菌摄取营养而进入体内等情形,我们可建立如下的单种细菌生长与环境关系数学模型:

$$\begin{cases} x'(t)=a\left(1-\dfrac{x(t)}{M}-by(t)\right)x(t) \\ y'(t)=cz(t)-fy(t) \\ z'(t)=dx(t)y(t)-gx(t)z(t)-hz(t) \\ x(0)>0,\ y(0)=0,\ z(0)>0 \end{cases} \quad (1)$$

这里 a 是细菌的内禀增长率,M 为环境容纳量,b 表示体内废物的致死系数,c 为环境废物向体内废物的转化常数,d 是细菌排放废物常数,g 为细菌对环境废物的吸收常数,f、h 分别表示体内废物和环境废物的溢流常数,它们都是正常数。模型(1)是在文献[2]的基础上,针对开放微生物生长系统,考虑了周围环境条件变化对细菌生长的影响关系而建立,是文献[2]的推广。同以往模型相比较,它更真实地反映了细菌波动生长的实际。

分析模型(1)的第一步是证明模型的合理性。具体地说,为了满足细菌生长的生物学意义,我们必须证明 x(t),y(t),z(t)始终非负且最终有界,即系统(1)必须是耗散系统[5]。这就是下面定理的内容。

定理 系统(1)的所有解始终非负且最终有界。

证明:因为系统(1)的初值非负,利用第一式容易得 x(t)始终非负。下证 y(t),z(t)始终非负。

假设 y(t),z(t)并不始终非负,则令 $t_1>0$ 是第一个使得 y(t)或 z(t)为零的那个时刻。不妨设 y(t)先取零值,则由第二式得 $y'(t_1)=cz(t_1)-fy(t_1)=cz(t_1)>0$,所以对于接近 t_1 而又小于 t_1 的 t,有 $y(t)<0$,但这与 t_1 是第一个使得 y(t)等于零的时刻矛盾。若假设 z(t)先取零值,则由第三式可得类似矛盾。所以系统(1)的所有解始终非负。

因为 y(t)始终非负,由第一式可得

$$x'(t)\leqslant a\left(1-\frac{x(t)}{M}\right)x(t)$$

作者简介:王开发(1972-),男,四川省绵竹市人,硕士,讲师,主要从事生物医学数学建模与分析方面的研究,发表论文 10 篇。电话:(023)68752211

收稿日期:2000-09-04;修回日期:2000-12-28

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

对方程 $x'(t)=a(1-\frac{x(t)}{M})x(t)$, 容易有 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)=M$。因此, 利用比较原理[5], 对系统(1)有 $\limsup\limits_{t\to+\infty} x(t)\leqslant M+\varepsilon$, ε 为任意正常数, 即 x(t)最终有界。再由第三式得

$$z'(t)\leqslant d(M+\varepsilon)y(t)-hz(t)$$

考虑线性系统

$$\begin{aligned} y'(t)&=cz(t)-fy(t),\\ z'(t)&=d(M+\varepsilon)y(t)-hz(t) \end{aligned} \qquad (2)$$

容易计算系统(2)的系数矩阵的特征值为 $\lambda_{1,2}=\frac{-(f+h)\pm\sqrt{(f-h)^2+4dc(M+\varepsilon)}}{2}$, 即至少有一个特征值 $\lambda<0$, 所以由比较原理可得系统(1)的 y(t), z(t)至少有一个有界。不妨设 z(t)有界, 如果此时 $\limsup\limits_{t\to+\infty} y(t)=+\infty$, 则由波动引理[6]知, 存在 $t_n\uparrow\infty$, 当 $n\to+\infty$时, 有 $y(t_n)\to+\infty$且 $y'(t_n)=0$。由系统(1)的第二式得 $0=y'(t_n)=cz(t_n)-fy(t_n)$, 矛盾。所以此时 y(t)也必有界。反之, 如果假设 y(t)有界, 则可类似证明 z(t)也必有界。综上所述, 系统(1)的所有解最终有界。

2　数值模拟分析

证明了模型(1)的合理性之后, 我们现在来看它对细菌生长繁殖将来的发展情况能作出什么预测, 是波动生长呢? 还是最终会平稳下来? 为了回答这一问题, 在设定 a=0.9, b=0.3, c=0.4, d=0.3, f=0.5, g=h=0.2, M=90 000 的模型参数前提下, 我们利用 Mathematic 3.0 软件在 Pentium Ⅱ 计算机上针对 x(0)=50, y(0)=0, z(0)=5 初值对系统(1)进行了数值模拟分析。得到细菌总菌数 x(t), 废物数量 y(t), z(t)的变化关系, 见图 1。

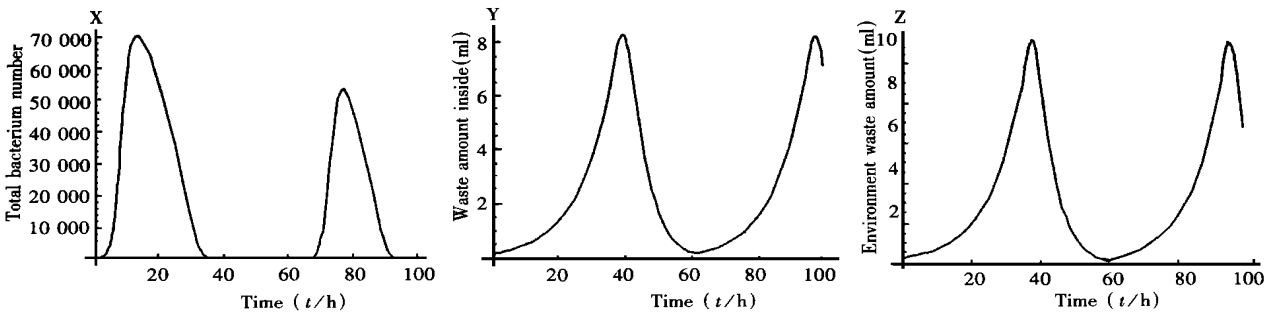


图 1　系统(1)的数值模拟结果

Fig 1　The numerical simulation results of the system(1)

3　讨论

本研究利用废物数量因子作为刻划环境条件变化的指标, 在 Logistic 方程的基础上, 建立了单种细菌生长与环境关系模型。通过对模型进行数值模拟分析, 从图示可以得出细菌总菌数 x(t)、废物数量 y(t)、z(t)的确是呈波动变化, 并且当废物数量最大时, 细菌总菌数最小(t=40 和 t=100 附近), 这同生物波理论[3,4]是相吻合的。由此说明该模型较好地描述了开放系统下细菌波动生长过程中总菌数与环境变化的定量关系, 为细菌波动生长的发生机制受环境因素及细菌代谢影响提供了理论依据, 对研究细菌波动生长规律作了有益探索。本研究所构建模型也可用于描述病毒对细菌的寄生作用或其它有关的污染环境中的单种群生长。

需要指出的是, 影响微生物生长的许多环境因素在本研究还未深入考虑。另外 y(t)与 z(t)曲线应有一个时间错位才显合理, 因此需考虑体内废物排出的时间滞后问题。为了更逼真地描述细菌生长实际, 还需对模型作进一步完善, 这在我们以后的工作中将逐步开展。

参考文献:

[1] 马知恩. 种群生态学的数学建模与研究[M]. 合肥: 安徽教育出版社, 1996. 11－25, 168－301.

[2] 王开发, 刘俊康, 徐启旺. 单种群杆菌简单波动生长的数学模型[J]. 第三军医大学学报, 2000, 22(2): 182－184.

[3] 徐启旺, 易卫东, 刘俊康, 等. 生物波的非平衡机制研究[J]. 西北大学学报(自然科学版), 1997, 27(Suppl): 320－325.

[4] 徐启旺, 刘俊康, 郭　刚, 等. 微生物生长的种群、周期和波动[J]. 自然杂志, 1992, 15(3): 195－196.

[5] 廖晓昕. 稳定性的数学理论及应用[M]. 武昌: 华中师范大学出版社, 1998. 83－90.

[6] Ellermeyer S F. Competition in the chemostat: global asymptotic behavior of a model with delayed response in growth[J]. SIAM J Appl Math, 1994, 54(2): 456－465.

(编辑　陈聪连)

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net